Varianta 81

Subiectul I:

a) $\sqrt{5}$. b) $2x+4y-5=0$. c) $a=\pm 2$. d) $x^2+y^2=5$. e) 1. f) 0..

Subiectul II:

1. a) Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{1}{2}$ .b) Fie $a<b<c$ cele trei numere în progresie aritmetică, deci $2b=a+c$ şi, folosind $a+b+c=9$, obținem $b=3, a=1, c=5$ .c) x=4^2=16. d) x=2. e) $\min_{x\in R} f(x)=-\frac{\Delta}{4a}=-4$.

2. a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. b) $f'(x)>0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe **R**.

c) $\lim_{x\to\pm\infty} arctgx=\pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote orizontale. d) 1. e) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$.

Subiectul III:

a) Se verifică prin calcul.

b) $\sigma^2=e \Leftrightarrow \sigma\cdot\sigma=e \Leftrightarrow \sigma=\sigma^{-1}$ si analog $\tau=\tau^{-1}$.

c) De exemplu $a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

d) $\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$

$\tau\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Deci $\sigma\cdot\tau\neq\tau\cdot\sigma$.

e) S_4 are $4!=24$ elemente.

f) Se arată prin calcul că, pentru $\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, avem $\sigma_1^4=e$.

g) Presupunem că exista o mulțime A care conține cel puțin 13 permutări cu proprietatea că oricare 2 comută. Se arată atunci că orice element din S_4 este un produs de 2 elemente din mulțimea A. Rezultă atunci că orice 2 elemente din S_4 comută ceea ce contrazice d). Deci presupunerea este falsă şi problema este rezolvată.

Subiectul IV:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin nx}{nx}\cdot n}{\frac{\sin x}{x}}=n, \forall n\in \mathbf{N}^*$.

b) f_n este evident continuă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ si cum $\lim_{x\to 0} f_n(x)=n=f(0)$ ea este continua si in x = 0

c) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)dx=\frac{\pi}{2}$. $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$.

d) $I_n - I_{n-2} = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-2}(x)dx = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) - f_{n-2}(x)dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos\frac{2(n-1)x}{2}}{\sin x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1)x dx = 2\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$\frac{2}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 3$.

e) Aplicând d), obținem $I_{2n+1} - I_{2n-1} = \frac{1}{n}\sin n\pi = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$, deci $I_{2n+1} = I_{2n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$,

de unde $I_{2n-1} = I_1 = \frac{\pi}{2}$.

f) Folosind d), obținem $I_{2n} - I_{2n-2} = \frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = -\frac{2}{2n-1}\cos n\pi$,

deci $I_{2n} = I_{2n-2} - \frac{2}{2n-1}\cos n\pi$, de unde $I_2 = I_0 - \frac{2}{3}\cos 2\pi = 2(1-\frac{1}{3})$.

Notăm $P(n): I_{2n} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1}\right), \forall n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1)$ este adevărată și considerăm $P(k)$ adevărată, $\forall k \in \mathbf{N}^*$. Atunci

$$I_{2k+2} = I_{2k} + \frac{2}{2k+1}\cdot\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + ... + (-1)^k \cdot \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{2}{2k+1}\sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) =$$

$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + ... + (-1) \quad \cdot \frac{1}{2k-1} + (-1)^k \frac{1}{2k+1}\right)$, deci $P(k+1)$ adevărată și, conform principiului inducției, $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) Din punctual f) rezultă $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2}I_{2n}$.

Aratam ca

$\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n} = \frac{\pi}{2}$. Avem $\quad I_{2n} - I_{2n-1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{4n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\cos\frac{(4n-1)}{2} dx = \frac{2}{4n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{(4n-1)}{2}\right)' dx =$$

$$= \frac{2}{4n-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{(4n-1)\pi}{8} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\sin\frac{(4n-1)}{2} dx\right) \to 0 \text{ deoarece functia } h(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\sin\frac{(4n-}{2}$$

este marginita pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.